Capitolo XIV

METODI DI INTEGRAZIONE DI PARTICOLARI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO E SECONDO ORDINE

1. Equazioni differenziali esatte.

Sia I un intervallo di R^2; $f: I \to R$ della forma

$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \qquad \forall (x,y) \in I \tag{1.1}$$

con $p,q : I \to R$ continue, $q(x,y) \neq 0$ in I e tali che la forma differenziale

$$p(x,y)dx - q(x,y)dy \tag{1.2}$$

sia un differenziale esatto. Diremo allora che l'equazione

$$y' = f(x,y) \tag{1.3}$$

è un'equazione differenziale esatta.
Ricordando che $y'(x)$ può essere considerato come il quoziente di due differenziali, alla (1.3) si può dare, convenzionalmente, la forma seguente:

$$p(x,y)dx - q(x,y)dy = 0 \quad .$$

Sia $F: I \to R$ una delle funzioni di cui (1.2) è il differenziale. Consideriamo l'equazione

$$F(x,y) = c \ . \quad (c \text{ costante arbitraria}) \tag{1.4}$$

Proveremo che tale equazione assegna in forma implicita tutti e soli gli integrali della (1.3).
Sia infatti $y=y(x)$ un integrale di (1.3), definito in un intervallo I^*; allora risulta, ricordando la (1.1) :

$$\frac{d}{dx} F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))y'(x)$$
$$= p(x,y(x)) - q(x,y(x))\ f(x,y(x))$$
$$= 0 \qquad \forall x \in I^* ,$$

e quindi $F(x,y(x))$ è costante in I^*.
Viceversa, sia $y=y(x)$ una funzione definita implicitamente dalla (1.3); per il teorema 7.2 del capitolo III, tale funzione è differenziabile in ogni punto del suo intervallo di definizione I^* e risulta

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} = \frac{p(x,y(x))}{q(x,y(x))} .$$

Quindi $y(x)$ soddisfa la (1.3).

Per ottenere l'integrale generale di una equazione differenziale esatta basta determinare, per esempio mediante la formula (10.2) del Capitolo XIII, una funzione $F(x,y)$ di cui la (1.2) sia il differenziale; la (1.4) assegna poi, in forma implicita, l'integrale generale dell'equazione considerata. Si ricava così, per l'integrale generale, l'espressione implicita seguente

$$(1.5) \qquad \int_{x_0}^{x} p(t,y^\circ)dt - \int_{y_0}^{y} q(x,t)dt = c$$

dove (x_0,y_0) è un punto qualsiasi di I e c è una costante arbitraria.

Esempio

L'equazione
$$y' = -\frac{2xe^y}{x^2e^y+1} \qquad x,y \in R$$

è un'equazione differenziale esatta. Infatti, le funzioni
$p(x,y)=2x\,e^y$, $q(x,y)=-x^2e^y-1$ sono continue, $q(x,y)\neq 0 \ \forall x,y \in R$
e la forma differenziale
$$2x\,e^y dx + (x^2e^y+1)dy$$
è un differenziale esatto per il teorema 10.2 del Capitolo XIII. L'integrale generale dell'equazione è quindi assegnato (per esempio) dalla formula
$$\int_0^x 2\,x\,dx + \int_0^y (x^2e^y+1)dy = c$$

e cioè risulta definito implicitamente dall'equazione
$$x^2e^y + y = c .$$

2. Equazioni a variabili separabili.

Siano g e h due funzioni reali definite, rispettivamente, negli intervalli I_1 e I_2 dell'asse reale.
L'equazione differenziale

$$(2.1) \qquad y' = g(x)h(y) \qquad x \in I_1 , \qquad y \in I_2$$

viene chiamata a variabili separabili.
Se consideriamo un qualunque intervallo $I^* \subseteq I_2$ in cui $h(y)\neq 0$, la (2.1) è un caso particolare di equazione differenziale esatta. Il suo integrale generale è quindi assegnato in forma implicita dalla (1.5), che in questo caso diviene
$$\int_{x_0}^{x} g(t)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(t)}dt = c$$
con $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I^*$, c costante arbitraria.

Fra le soluzioni della (2.1) vi sono poi, evidentemente, anche tutte le funzioni costanti della forma
$$y(x) = y_0$$
dove y_0 è una qualunque soluzione dell'equazione $h(y)=0$.

Esempio

L'equazione
$$y' = \frac{xy}{y-1} \qquad (y \neq 1)$$
è a variabili separabili.
La funzione $y(x)=0 \ \forall x$ è un integrale dell'equazione. Supposto $y\neq 0$ scriviamo l'equazione in forma differenziale:
$$\frac{y-1}{y}dy - x\,dx = 0 .$$
L'equazione
$$\int_{y_0}^{y} \frac{y-1}{y}dy - \int_{x_0}^{x} x\,dx = 0$$
definisce implicitamente tutti gli altri integrali dell'equazione. Es

si sono quindi le funzioni implicite definite da

$$y - \log|y| = \frac{1}{2}x^2 + K$$

(K costante) e la funzione identicamente nulla.

3. Fattore integrante.

Sia I un intervallo di R^2, $f: I \to R$ continua e consideriamo l'equazione differenziale

$$(3.1) \qquad y' = f(x,y) \quad .$$

Supponiamo che f abbia la forma (1.1)

$$(3.2) \qquad f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

con p,q continue e $q \neq 0$ in I.
Se la forma differenziale (1.2)

$$p(x,y)dx - q(x,y)dy$$

non è un differenziale esatto, si può cercare di determinare una funzione $g(x,y)$, continua e non nulla in I, in modo che la forma differenziale

$$(3.3) \qquad p(x,y)g(x,y)dx - q(x,y)g(x,y)dy$$

sia esatta.
La funzione g viene chiamata fattore integrante.
Una volta determinato un fattore integrante e scritta f nella forma $f = gp/gq$, l'equazione differenziale (3.1) può venire integrata col metodo indicato nel n.1.
Dai teoremi 10.1 e 10.2 del Cap.XIII, segue immediatamente che, se p,q e g sono di classe $\mathscr{C}^1$ in I, condizione necessaria e sufficiente affinchè g sia un fattore integrante è che essa sia soluzione dell'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$\frac{\partial(gp)}{\partial y} + \frac{\partial(gq)}{\partial x} = 0 \quad ,$$

e cioè

$$(3.4) \qquad p\,\frac{\partial g}{\partial y} + q\,\frac{\partial g}{\partial x} = -g\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) \quad .$$

Il problema di trovare un fattore integrante è quindi, in generale, più complicato di quello di risolvere l'equazione differenziale data.
La ricerca di un fattore integrante diviene però più semplice qualora ne esista uno dipendente da una sola delle due variabili x e y, per esempio da x. Sia ad esempio $h=h(x)$ un tale fattore integrante. La (3.4) si riduce allora all'equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita $h=h(x)$

$$(3.5) \qquad \frac{h'}{h} = -\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) \quad .$$

Se il fattore integrante $h=h(x)$ cercato esiste, il rapporto $\frac{h'}{h} = -\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right)$ deve essere indipendente da y; se questo avviene, l'equazione (3.5) è a variabili separabili e il suo integrale generale

$$h(x) = c\,\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right)dx\right\}$$

assegna i fattori integranti cercati.
Analogamente si trova che, se l'equazione (3.1) **ammette un fattore integrante funzione della sola y, allora esso è soluzione dell'equazione differenziale**

$$(3.6) \qquad \frac{k'}{k} = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

il cui secondo membro deve essere indipendente da x. La (3.6) è allora a variabili separabili e il suo integrale generale

$$k(y) = c\cdot\exp\left\{-\int_{y_0}^{y}\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right)dy\right\}$$

assegna i fattori integranti cercati.

Esempio

Si consideri l'equazione

$$y' = -\frac{y^3+y+x^2+2x}{3y^2+1} \quad .$$

Posto $p(x,y) = y^3+y+x^2+2x$, $q(x,y) = -(3y^2+1)$, è immediato verificare

che $p, q \in \mathscr{C}^{(\infty)}(R^2)$ e che $q(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in R^2$. La forma differenziale $p dx - q dy$ non è però esatta, perchè $\frac{\partial p}{\partial y} \neq - \frac{\partial q}{\partial x}$.
Poichè risulta

$$- \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) = 1 \quad ,$$

esiste un fattore integrante indipendente da y. Per determinarlo basta risolvere l'equazione differenziale (3.5) che, in questo caso, diviene

$$\frac{h'}{h} = 1 \quad .$$

Il suo integrale generale è $h(x,c) = c\, e^x$. Assumendo per esempio e^x come fattore integrante, l'equazione data diviene

$$y' = - \frac{(y^2+y+x^2+2x)e^x}{(3y^2+1)e^x}$$

ed il suo integrale generale è assegnato per esempio dall'equazione

$$\int_0^x (x^2+2x)e^x dx + \int_0^y (3y^2+1)e^x dy = c$$

e cioè da

$$(y^3+y+x^2)e^x = c \quad .$$

4. Equazioni omogenee.

Si consideri l'equazione :

$$(4.1) \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$$

dove f è una funzione continua su un intervallo I di R .
Sia $y=y(x)$ una soluzione dell'equazione (4.1).
Poniamo

$$(4.2) \qquad t(x) = \frac{y(x)}{x} \quad .$$

La funzione $t(x)$ deve soddisfare l'equazione a variabili separabili :

$$x \cdot t'(x) + t(x) = f(t(x))$$

cioè :

$$t' = \frac{f(t)-t}{x}$$

che ha come soluzioni le funzioni della forma

$$t = t_0$$

dove t_0 è una radice dell'equazione

$$f(t) - t = 0$$

e le funzioni definite implicitamente dall'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{f(t)-t} = \log |x| + c \quad .$$

Da esse, mediante la (4.2), si ricavano tutti gli integrali della (4.1).

<u>E s e m p i o</u>

Consideriamo l'equazione

$$(4.3) \qquad x^2 y' + x^2 + y^2 = 0 \qquad (x \neq 0).$$

Si ha :

$$y' = - \frac{x^2+y^2}{x^2} = -\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

Posto $y=tx$ si giunge all'equazione :

$$- \frac{t'}{t^2+t+1} = \frac{1}{x}$$

(si noti che in questo caso è sempre $f(t) \neq t$) , da cui

$$- \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{t^2+t+1} = \log |x| + c$$

cioè, ponendo $c=-\log K$

$$- \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} = \log |x| - \log K$$

da cui

$$x = K\, e^{-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}}$$

con K costante reale (anche negativa!).
Le equazioni

$$\begin{cases} y = Kt\, e^{-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}} \\ x = K\, e^{-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}} \end{cases}$$

assegnano le soluzioni dell'equazione data in forma parametrica.

5. Equazioni lineari.

Si consideri un'equazione lineare del 1° ordine, cioè della forma :

(5.1) $$y' + P(x)y = Q(x)$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni assegnate di x, definite e continue in un intervallo I di R.
Per integrare questa equazione, seguiamo il metodo indicato nel par.11 del Cap.XII; cerchiamo innanzi tutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e successivamente un integrale particolare della (5.1).
L'equazione lineare omogenea associata alla (5.1) ha la forma :

$$y' + P(x)y = 0 \quad ,$$

è quindi a variabili separabili ed il suo integrale generale è

$$y = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \qquad (x_0 \in I).$$

Usiamo ora il metodo di variazione della costante arbitraria. Cerchiamo un integrale particolare del tipo :

(5.2) $$\bar{y} = c(x)e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \quad .$$

$c(x)$ deve soddisfare alla condizione :

$$c'e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} = Q(x) \quad ,$$

equazione che ha come soluzione la funzione :

(5.3) $$c(x) = \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx} dx \quad .$$

Sostituendo la (5.3) nella (5.2) si ottiene un integrale particolare della (5.1)

$$\bar{y} = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \int_{x_0}^{x} Q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx} dx \quad .$$

L'integrale generale della (5.1) è perciò :

$$y = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} + e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx} dx$$

e cioè

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} + K\right]$$

(K costante reale).

Esempio

Consideriamo l'equazione :

$$y' + 3x^2y = x^2 \quad .$$

Risolvendo l'omogenea associata si ha

$$y = c\, e^{-\int_0^x 3x^2 dx} = c\, e^{-x^3} \quad .$$

All'integrale particolare si perviene risolvendo l'equazione

$$c'e^{-x^3} = x^2 \quad .$$

Si ottiene quindi $$c(x) = \int x^2 e^{+x^3} dx = + \frac{1}{3} e^{+x^3} + c$$

quindi l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = e^{-x^3}\left[\frac{1}{3} e^{x^3} + c\right] = \frac{1}{3} + c\, e^{-x^3} \quad .$$

6. Equazioni di Bernoulli.

Sono le equazioni della forma :

(6.1) $$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

con n reale qualsiasi, $P(x)$ e $Q(x)$ funzioni reali definite e continue in un intervallo I di R. Per $n=0$ la (6.1) si riduce ad un'equazione lineare ; per $n=1$ si scrive nella forma

$$y' = y\,[Q(x)-P(x)]$$

che è a variabili separabili.
Supponiamo allora $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Per $n > 0$ un integrale della (6.1) è sempre $y(x)=0$.
Sia $y=y(x)$ una soluzione non nulla della (6.1). Si dividano entrambi i membri dell'equazione per y^n ; si ottiene l'equazione

(6.2) $$y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad .$$

Poniamo ora

$$z(x) = y(x)^{1-n} \quad ;$$

da cui

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad .$$

Ne segue che la funzione z è soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$(6.3) \qquad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \quad .$$

L'integrale generale di (6.3) è

$$z = e^{(n-1)\int P(x)dx}\left[\int (1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c\right]$$

Segue allora che y(x) è della forma

$$(6.4) \qquad y=z^{\frac{1}{1-n}} = e^{-\int P(x)dx}\left[\int (1-n)Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

E s e m p i o

Sia data l'equazione

$$y' + \frac{y}{x} - y^2\frac{\log x}{x} = 0 \quad .$$

Segue :

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{xy} + \frac{\log x}{x} \quad .$$

Poniamo :

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \quad .$$

Si ottiene :

$$z' - \frac{1}{x}z + \frac{\log x}{x} = 0$$

da cui :

$$z(x) = e^{\int \frac{dx}{x}}\left[-\int \frac{\log x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}} + c\right] =$$

$$= x\left\{-\int \frac{\log x}{x^2}dx + c\right\} = x\left\{\frac{1}{x}\log x + \frac{1}{x} + c\right\} = \log x + 1 + cx$$

e infine

$$y(x) = \frac{1}{\log x + 1 + cx} \quad .$$

7. Equazioni di Riccati.

Sono equazioni della forma

$$(7.1) \qquad y' = L(x)y^2 + M(x)y + N(x)$$

con L,M,N funzioni continue in un intervallo I di R .

Per integrare l'equazione (7.1) è necessario conoscere preventivamente una sua soluzione: sia essa $y_0=y_0(x)$. Sia ora $y=y(x)$ un'altra soluzione di (7.1): si ponga

$$(7.2) \qquad v(x) = y(x) - y_0(x) \quad .$$

Derivando la (7.2) si ottiene

$$\begin{aligned} v' &= y'-y_0' = Ly^2+My+N-(Ly_0^2-My_0-N) \\ &= L(v+y_0)^2+Mv-Ly_0^2 \\ &= Lv^2+(2Ly_0+M)v \quad . \end{aligned}$$

La funzione v è quindi soluzione dell'equazione di Bernoulli

$$v'-(2Ly_0+M)v = L\,v^2$$

il cui integrale generale è dato da

$$(7.3) \quad v=e^{\int(2Ly_0+M)dx}\left\{\int -L\, e^{\int(2Ly_0+M)dx}dx+c\right\}^{-1} .$$

L'integrale generale di (7.1) è quindi

$$y(x) = y_0(x) + v(x)$$

con v assegnata da (7.3).

E s e m p i o

Si consideri l'equazione

$$y' = \frac{y^2}{\log x} - y + \frac{1}{x} \quad .$$

Un suo integrale particolare è dato da $y_0(x)=\log x$.
La (7.3) diviene allora

$$v(x) = e^{\int dx}\left\{\int \frac{1}{\log x}e^x dx + c\right\}^{-1}$$

e l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = \log x + \frac{e^x}{\int \frac{e^x}{\log x}dx+c} \quad .$$

8. Equazioni del tipo $f(x,y')=0$.

Per equazioni di questo tipo è possibile, in ipotesi opportune su f, ottenere l'integrale generale in forma parametrica, con un metodo che può venire applicato, con opportune modifiche, ad altri tipi di equazioni differenziali, che vedremo in seguito.
Supponiamo che sia verificata la seguente ipotesi

(A) f sia continua in un intervallo $I \subseteq R^2$ ed esistano due funzioni reali g e h della variabile reale t, rispettivamente di classe $\mathscr{C}^{(1)}$ e $\mathscr{C}^{(0)}$ in un intervallo $I^* \subseteq R$ e tali che

$$f(g(t),\, h(t)) = 0 \qquad \forall\, t \in I^* .$$

Consideriamo l'equazione

$$(8.1) \qquad f(x,y') = 0 \quad .$$

Supposto che una sua soluzione sia esprimibile parametricamente mediante le equazioni

$$x = g(t) \qquad y'(x)=h(t) \quad ,$$

la funzione $y=y(x(t))$ avrà la sua derivata prima $y'(t)$ assegnata da

$$y'(t) = h(t)\, g'(t)$$

e quindi dovrà essere

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(u)g'(u)du + c \qquad (t_0 \in I^*).$$

Poniamo allora :

$$(8.2) \qquad \begin{cases} x=g(t) \\ y=\int_{t_0}^{t} h(u)g'(u)du+c \end{cases}$$

dove $t_0 \in I^*$ è tale che $g'(t_0)\neq 0$.
Allora $g(t)$ è invertibile in un intorno di t_0 (essendo g' continua su I^*) e, denotata con $t(x)$ la funzione inversa, dalle (8.2) si ricava

$$(8.3) \qquad \begin{cases} t=t(x) \\ y=\int_{t_0}^{t(x)} h(u)g'(u)du+c \end{cases} \quad .$$

La funzione $y=y(x)$ assegnata dalla seconda delle

(8.3) soddisfa l'equazione (8.1). Infatti, per noti teoremi di derivazione, si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= h(t(x))\cdot g'(t(x))\cdot t'(x) \\ &= h(t(x)) = h(t) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(x,y'(x)) = f(g(t)\ ,h(t)) \equiv 0 \quad .$$

Le (8.2) forniscono dunque, in forma parametrica, una famiglia di integrali della (8.1).

Esempio

Data l'equazione

$$xy'^2 + y' + x = 0$$

si ponga $g(t) = -\frac{t}{1+t^2}$, $h(t)=t$ $(t \in R)$.

Le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{t}{1+t^2} \\ y = \int_0^t \frac{u(u^2-1)}{(u^2+1)^2}\, du + c \end{cases}$$

assegnano, in forma parametrica, una famiglia di integrali dell'equazione .
Si noti che per $t \neq \mp 1$ risulta $g'(t)\neq 0$ e quindi g è invertibile. In questo caso, anzi, essendo evidentemente possibile ricavare esplicitamente dalla prima equazione del sistema la funzione inversa $t=t(x)$, gli integrali di cui sopra sono ottenibili in forma esplicita.

9. Equazioni del tipo $f(y,y')=0$.

La funzione f soddisfi l'ipotesi (A) del n.8 e consideriamo l'equazione

$$(9.1) \qquad f(y,y') = 0 \quad .$$

Osserviamo preliminarmente che, se t_0 è una radice dell'equazione $h(t)=0$, la funzione costante $y(x)=g(t_0)$ è soluzione di (9.1).
Sia ora $h(t)\neq 0$ in I^* e supponiamo che la (9.1) ammetta una soluzione assegnata in forma parametrica dalle equazioni

$$y = g(t) \quad , \quad y' = h(t) \quad .$$

Se $y=y(x)$ è invertibile, la funzione inversa $x(y)$ avrà la sua derivata prima $x'(y)$ assegnata da $1/h(t)$ e quindi per la funzione $x(t)=x(y(t))$ si avrà

$$x'(t) = \frac{g'(t)}{h(t)}$$

e quindi sarà

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} \frac{g'(u)}{h(u)}\, du + c \qquad t_0 \in I^*.$$

Poniamo allora

$$(9.2) \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{g'(u)}{h(u)}\, du+c \\ y=g(t) \end{cases} \qquad t_0 \in I^*.$$

Se è $g'(t_0)\neq 0$, la prima delle (9.2) è invertibile qualunque sia c e definisce in un intorno di c una funzione $t=t(x)$, la cui derivata $t'(x)$ è assegnata da

$$t'(x) = \frac{h(t)}{g'(t)} \quad .$$

Per la funzione $y(x)=g(t(x))$ si ha allora

$$y'(x)=g'(t)\, t'(x)=h(t)$$

e quindi $y(x)$ soddisfa la (9.1).
Le (9.2) assegnano perciò in forma parametrica una famiglia di integrali di (9.1).

Esempio

Consideriamo l'equazione

$$yy'^2 + y' + y = 0 \quad .$$

Poniamo (come nell'esempio del n.8) $g(t) = \frac{-t}{t^2+1}$, $h(t)=t$. Se $t\neq 0$, si ottiene

$$\begin{cases} y = -\dfrac{t}{t^2+1} \\ x = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{u^2-1}{u(u^2+1)^2} + c \end{cases} \quad .$$

Inoltre, l'equazione ammette la soluzione $y=0$ (corrispondente a $t=0$).

10. Equazioni di D'Alembert-Lagrange.

In questo paragrafo e nel successivo esamineremo alcune particolari equazioni del tipo

$$y = f(x,y')$$

che si integrano con procedimenti di derivazione. Posto $y'=p$, derivando l'equazione data si ottiene

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\, p' \quad .$$

Se si sa integrare questa equazione differenziale nella funzione incognita $p=p(x)$, il problema di ottenere la soluzione dell'equazione data è ricondotto alle quadrature.
Consideriamo qui, in particolare, le cosiddette equazioni di D'Alembert-Lagrange; esse sono equazioni della forma :

$$(10.1) \qquad y = x\, f(y') + g(y')$$

con f e g funzioni di classe $\mathcal{C}^{(1)}$ su un intervallo I di R.
Sia $y=y(x)$ una soluzione di classe $\mathcal{C}^{(2)}$; poniamo $y'(x)=p(x)$: la (10.1) diventa

$$(10.2) \qquad y(x)=x\, f(p(x))+g(p(x)) \quad .$$

Derivando rispetto ad x si ottiene la seguente equazione differenziale nella funzione incognita p :

$$(10.3) \qquad p=f(p)+[xf'(p)+g'(p)]\,p' \quad .$$

Supponendo ulteriormente che la funzione $p(x)$ sia invertibile e detta $x=x(p)$ la funzione inversa, è necessariamente $x'(p(x)) = \frac{1}{p'(x)}$. Quindi la funzione $x(p)$ è soluzione dell'equazione lineare che si ottiene da (10.3) ,

$$(10.4) \qquad x' + \frac{f'(p)}{f(p)-p}\, x = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$$

nell'ipotesi che sia $f(p)\neq p$ in I .
L'integrale generale della (10.4) è

$$(10.5) \quad x(p,c)=e^{\int \frac{f'(p)}{p-f(p)}\,dp}\left[\int \frac{g'(p)}{p-f(p)}\, e^{\int \frac{f'(p)}{f(p)-p}\,dp}\,dp+c\right]$$

La coppia di funzioni

$$\begin{cases} x = x(p,c) \\ y = x(p,c)f(p)+g(p) \end{cases}$$

dà l'integrale generale di (10.1) in forma parametrica.

Supponiamo ora che l'equazione $f(p)=p$ ammetta una radice $\bar{p}$ e I. E' facile verificare che la funzione $y=x\, f(\bar{p})+g(\bar{p})$ è soluzione di (10.1).

Esempio

Consideriamo l'equazione

$$y = -x(y')^2+(1+y')^2 \quad .$$

Ponendo $y'=p$ si ottiene

$$(10.6) \qquad y = -xp^2+(1+p)^2$$

e derivando rispetto alla variabile x

$$p = -p^2-2pxp'+ 2(1+p)p'$$

$$p+p^2= p'(-2px+2(1+p))$$

cioè (supposto $p+p^2\neq 0$) :

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{1+p}\, x = \frac{2}{p} \quad .$$

L'integrale generale di questa equazione lineare è

$$(10.7) \qquad x(p,c) = \frac{1}{(1+p)^2}\left\{ \log p^2+4p+p^2+c \right\} \quad .$$

Inoltre, da $p+p^2=0$ si ricava $p=0$, $p=-1$. Quindi $y=1$ e $y=-x$ sono integrali particolari dell'equazione.

Il sistema della (10.6) con la (10.7) dà l'integrale generale in forma parametrica.

11. Equazioni di Clairaut.

L'equazione di Clairaut :

$$(11.1) \qquad y = xy'+g(y')$$

è un caso particolare dell'equazione di D'Alembert Lagrange. Per essa si ha identicamente $p-f(p)=0$. Posto $y'=p$ la (11.1) diventa

$$y = xp + g(p)$$

e derivando si ottiene

$$p = p + xp' + g'(p)p'$$

cioè

$$p'(x+g'(p)) = 0 \quad .$$

Si ha allora $p'=0$ da cui $p=c$ e l'integrale generale è :

$$y = xc + g(c) \quad .$$

Supposto, invece, $x=-g'(p)$, la coppia di funzioni

$$\begin{cases} x = -g'(p) \\ y = -p\, g'(p)+g(p) \end{cases}$$

è un integrale di (11.1) in forma parametrica.

Esempio

Sia data l'equazione

$$y = xy' - e^{y'} \quad .$$

Ponendo $y'= p$ e derivando rispetto ad x si ottiene

$$p = p + xp' - e^p p'$$

cioè

$$p'(x-e^p) = 0 \quad .$$

L'integrale generale è

$$y = cx - e^c$$

e l'integrale singolare segue da

$$\begin{cases} x = e^p \\ y = xp-e^p \end{cases}$$

cioè, in forma esplicita, esso è

$$y = x\{\log x-1\} \quad .$$

12. Equazioni del secondo ordine della forma $f(x,y'')=0$, oppure $f(y,y'')=0$.

La funzione f soddisfi la condizione (A) del n.8 e consideriamo le equazioni

$$f(x,y'') = 0 \tag{12.1}$$

$$f(y,y'') = 0 \quad . \tag{12.2}$$

Entrambe si integrano con un procedimento analogo a quello seguito nei n.8 e 9.
Cominciamo dall'equazione (12.1).
Se esiste un suo integrale rappresentabile parametricamente nella forma

$$x = g(t) \quad , \quad y''= h(t) \quad ,$$

allora si ha

$$\frac{d}{dt}\, y'_x(x(t)) = h(t)g'(t)$$

da cui

$$y'_x(x(t)) = \int_{t_o}^{t} h(u)g'(u)du + c \qquad (t_o \in I^*)$$
$$= h_1(t) + c \quad .$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}\, y(x(t)) = (h_1(t)+c)g'(t)$$

da cui

$$y(x(t)) = \int_{t_o}^{t} h_1(u)g'(u)du + c\ g(t) + c_1$$

Poniamo allora

$$\begin{cases} x(t)=g(t) \\ y(t)=\int_{t_o}^{t} h_1(u)g'(u)du+cg(t)+c_1 \end{cases} \tag{12.3}$$

dove

$$h_1(t) = \int_{t_o}^{t} h(u)g'(u)du$$

e $t_o \in I^*$ è tale che $g'(t_o) \neq 0$.
Ragionando come nei n.8 e 9, si dimostra facilmente che le (12.3) assegnano una famiglia di integrali della (12.1).

Consideriamo ora la (12.2).
Supposto che un suo integrale sia parametricamente esprimibile mediante le

$$y = g(t) \quad , \quad y'' = h(t) \,,$$

risulta:

$$2y''_x dy = d(y'^2_x) = 2h(t)g'(t)dt$$

da cui

$$y'_x = \left\{2\int_{t_o}^{t} h(u)g'(u)du + c\right\}^{\frac{1}{2}} = \alpha(t,c)$$

$(t_o \in I^*)$ e quindi

$$dx = \frac{dy}{y'_x} = \frac{g'(t)}{\alpha(t,c)}\, dt$$

e infine

$$x = \int_{t_o}^{t} \frac{g'(u)}{\alpha(u,c)}\, du + c_1 \quad .$$

Poniamo allora

$$\begin{cases} x = \int_{t_o}^{t} \frac{g'(u)}{\alpha(u,c)}\, du + c_1 \\ y = g(t) \end{cases} \tag{12.4}$$

dove $\alpha(t,c) = \left\{2\int_{t_o}^{t} h(u)g'(u)du + c\right\}^{\frac{1}{2}}$ e $t_o \in I^*$ è tale che $g'(t_o) \neq 0$.
Ragionando come nei n.8 e 9 si prova che le (12.4) assegnano (in ipotesi opportune su c) in forma parametrica una famiglia di integrali della (12.2).

E s e m p i o

Sia data l'equazione

$$y - e^{y''} = 0 \quad .$$

Si può assumere $g(t)=t$ e $h(t)=\log t$ $(t>0)$. Si ottiene, assumendo per esempio $t_o=e$

$$\alpha(t,c) = \pm\left(2\int_{e}^{t} \log u\ du + c\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \mp\left(2(t\log t - t) + c\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \mp\left(2\log t + K\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Quindi gli integrali dell'equazione data sono assegnati da

$$\begin{cases} y = t \\ x = \mp\int_{e}^{t} \frac{du}{\left\{2u(\log u - 1)+c\right\}^{\frac{1}{2}}} + c_1 \end{cases} \quad (c, c_1 \text{ costanti}$$

per $t > t_o = t_o(c)$.

13. Equazioni della forma: $f(y,y',y'')=0$.

Sia f una funzione continua in un intervallo I di R^3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$(13.1) \qquad f(y,y',y'') = 0$$

e sia $y=y(x)$ una soluzione invertibile di (13.1) e sia $x=x(y)$ la funzione inversa. Indichiamo con $z(y)$ la funzione così definita :

$$(13.2) \qquad z(y) = y'(x(y)) \ .$$

Da (13.2) segue facilmente che :

$$(13.3) \qquad y'(x) = z(y(x)) \ .$$

Derivando ambo i membri di (13.3) rispetto a x si ottiene:

$$y''(x) = z'(y(x))\ z(y(x)) \ .$$

ove con z' si è indicata la derivata di z rispetto a y . Da quanto detto segue che $z=z(y)$ è soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine

$$(13.4) \qquad f(y,z,z'\cdot z) = 0 \ .$$

Se si riesce a determinare l'integrale generale $z=z(y,c)$ della (13.4), la determinazione dell'integrale generale della (13.1) è ricondotta all'integrazione dell'equazione del primo ordine a variabili separabili

$$y'(x) = z(y,c)$$

e cioè alle quadrature.

E s e m p i o

Consideriamo l'equazione

$$yy'' - 2y' - y'^2 = 0 \ .$$

Poniamo $y'(x) = z(y(x))$, da cui $y''(x) = z'(y(x))z(y(x))$.
Allora z è soluzione dell'equazione differenziale in y

$$z(yz'-2-z) = 0 \ .$$

Di qui si ricava $z(y) \equiv 0$ e cioè $y=c$, oppure

$$z' - \frac{z}{y} = + \frac{2}{y} \qquad (y \neq 0) \ .$$

Tale equazione è lineare in z : l'integrale generale è

$$z(y,c_1) = -2 + c_1 y \ .$$

L'equazione

$$y' = -2 + c_1 y$$

è a variabili separabili e l'integrale generale è assegnato da :

a) $\qquad y = -2x + c_2 \quad$ se $c_1 = 0$

b) $\qquad x = \frac{1}{c_1} \log |c_1 y - 2| + c_2 \quad$ se $c_1 \neq 0$.

14. Equazioni della forma: $f(x,y',y'',\dots y^{(n)})=0$.

Si debba integrare l'equazione differenziale di ordine n :

$$(14.1) \qquad f(x,y',\dots y^{(n)}) = 0 \ .$$

Ponendo $p(x)=y'(x)$, la funzione $p(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale di ordine n-1

$$(14.2) \qquad f(x,p,p',\dots,p^{(n-1)}) = 0 \ .$$

Qualora si sappia integrare la (14.2), la funzione

$$y = \int p(x,c\ ,\dots c_{n-1})dx + c_n$$

è l'integrale generale della (14.1).
Si osservi che fra le equazioni di questa categoria rientrano le equazioni del 2° ordine aventi la forma :

$$f(x,y',y'') = 0 \ .$$